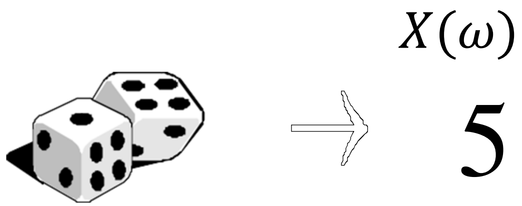
2. 1 Variável aleatória

Uma variável aleatória é uma variável que assume um valor numérico determinado por uma experiência aleatória. A sua definição formal é a seguinte.

- **Definição – Variável aleatória**
  Uma variável aleatória, X, é uma função com domínio Ω e com contradomínio em $\Re$. Assim, $X : \omega \in \Omega \rightarrow X(\omega) \in \Re$.

- **Exemplo 2.1–** Quando se lançam dois dados e se regista apenas a soma de pontos obtida está-se a trabalhar com uma variável aleatória definida pela correspondência

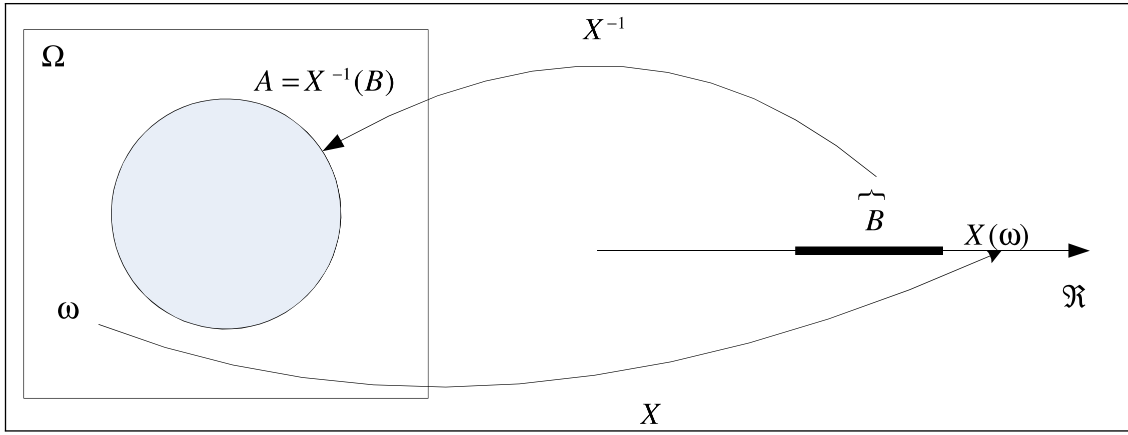


Em termos formais: $\Omega = \{(i, j) : i, j = 1,2,3,4,5,6\}$ e $X\,[(i, j)] = i + j$.

;

Comentários:

- A função X faz corresponder a cada $\omega \in \Omega$ um e só um $X(\omega) \in \Re$;
- Definida a variável aleatória, considera-se $\Re$ como o novo espaço de resultados e os subconjuntos $B \subset \Re$ como acontecimentos.
- A prob. de $X \in B$, $P_X(B) = P_X(X(\omega) \in B)$ é dada pela imagem inversa de B



$$P_X(B) = P(X^{-1}(B))$$
$$= P(A)$$

$$A = \{\omega : X(\omega) \in B\}$$

- Por "abuso de linguagem" também se chama variável aleatória à imagem $X(\omega)$;
- Não havendo confusão,
  - utiliza-se X em vez de $X(\omega)$ para a imagem de ω;
  - abandona-se o índice X, escrevendo-se $P(B)$ em vez de $P_X(B)$.

- **Convenção importante**: A **variável aleatória** é designada por **letra maiúscula** enquanto os **particulares valores** que resultam de cada experiência são representados pela respectiva **letra minúscula**.

- **Exemplo 2.2 –** Retome-se o exemplo 2.1 (soma dos pontos em 2 dados). No quadro indicam-se as imagens, as imagens inversas e as probabilidades relevantes.

$$P_X(\{2\}) = P(X = 2) = 1/36,\ P_X(\{3\}) = P(X = 3) = 2/36 = 1/18,\ \ldots$$

Imagens	Imagens inversas	Prob
$\{2\}$	$\{(1,1)\}$	1/36
$\{3\}$	$\{(1,2),(2,1)\}$	2/36
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\{7\}$	$\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$	6/36
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\{12\}$	$\{(6,6)\}$	1/36

Calcule-se a probabilidade de $B = (3,4]$.

Exemplo 2.3: Lança-se ao acaso uma moeda ao ar duas vezes. Seja X=número de vezes que aparece "Face". Determine $P(X=0)$, $P(X=1)$ e $P(X=2)$.

2.2 Função de distribuição

Ideia: Substituir a medida de probabilidade P por uma função real de variável real, de tratamento matemático mais acessível

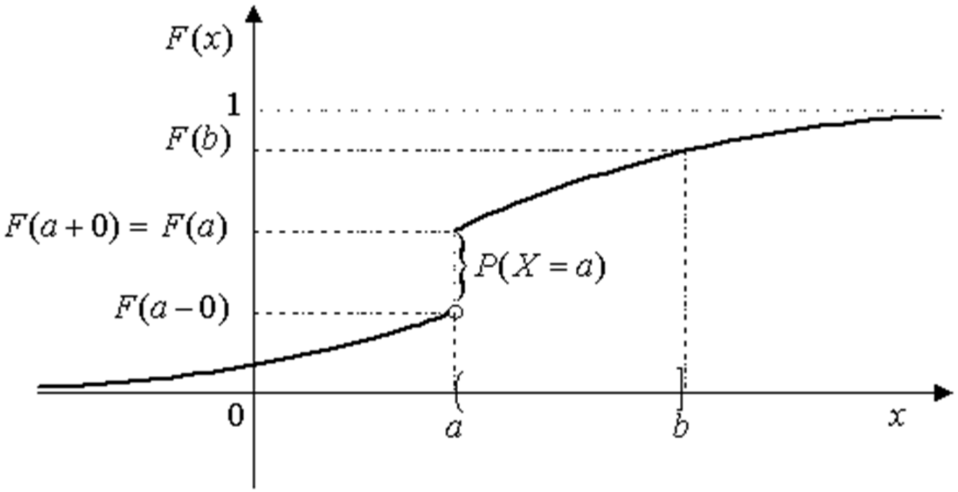
- **Definição – Função de distribuição**

A função real de variável real, F, com domínio $\Re$, definida por, $F_X(x) = P(X \leq x)$, designa-se por função de distribuição da variável aleatória X.

- **Comentários**
  - $F_X(x) = P(X \leq x)$ existe sempre por definição
  - $F_X(x)$ não é mais do que a probabilidade do acontecimento $B = (-\infty, x]$.
  - Quando tal não provoque confusão escreve-se $F(x)$ em vez de $F_X(x)$.

Propriedades da função de distribuição (a, b, x, $\Delta x \in \Re$)**:**

1) $0 \leq F(x) \leq 1$.
2) F é não decrescente: $\Delta_x > 0 \Rightarrow F(x) \leq F(x + \Delta_x)$.
3) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
4) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$, quaisquer que sejam $a, b \in \Re$ a verificar $b > a$.
5) F é contínua à direita: $F(a^+) = \lim_{x \to a^+} F(x) = F(a)$.
6) $P(X = a) = F(a) - F(a^-)$, com $F(a^-) = \lim_{x \to a^-} F(x)$ qualquer que seja $a \in \Re$.



Mais propriedades (fácil demonstração a partir das anteriores):

a) $P(X < b) = F(b^-)$;
b) $P(X > a) = 1 - F(a)$;
c) $P(X \geq a) = 1 - F(a^-)$;
d) $P(a < X < b) = F(b^-) - F(a)$;
e) $P(a \leq X < b) = F(b^-) - F(a^-)$;
f) $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-)$.

- **Teorema –** A função real de variável real, F, é uma **função de distribuição** se e só se verifica as **propriedades 2, 3 e 5**
- **Exemplo 2.4 –** Será que

$$F(x) = 1 - e^{-x} \ (x > 0)$$

define uma função de distribuição?

2. 3. Classificação das variáveis aleatórias

Conjunto dos pontos de descontinuidade de $F(x)$:

$$D = \{x : P\ (X = x) = F(x) - F(x^{-})\ > 0\}$$

- Em cada ponto de descontinuidade x_i, o salto é igual a $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i^{-})$.
- O conjunto D é finito ou, quando muito, infinito numerável

Definição – Classificação das variáveis aleatórias

- X é uma **variável aleatória discreta** se $P(X \in D) = \sum_{x_i \in D} P(X = x_i) = 1$
- X é uma **variável aleatória contínua** se $D = \varnothing$ e se existe uma função real de variável real $f(x)$, não negativa, tal que $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \quad \forall x \in \Re$
- X é um **variável aleatória mista** se a respetiva função de distribuição pode ser escrita como $F(x) = \lambda F_1(x) + (1-\lambda)F_2(x)$, $(0 < \lambda < 1)$ onde:
  - $F_1 \longrightarrow$ função de distribuição associada a uma variável aleatória discreta;
  - $F_2 \longrightarrow$ função de distribuição associada a uma variável aleatória contínua.

Existem variáveis aleatórias que não são nem discretas, nem contínuas nem mistas.

2.4 Variável aleatória discreta

Uma variável aleatória é discreta se só pode assumir uma quantidade numerável de valores.

- **Definição – Função probabilidade**:

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{se } x \in D, \\ 0 & \text{se } x \notin D. \end{cases}$$

- A probabilidade de qualquer acontecimento *B* pode ser obtida exclusivamente a partir da função probabilidade

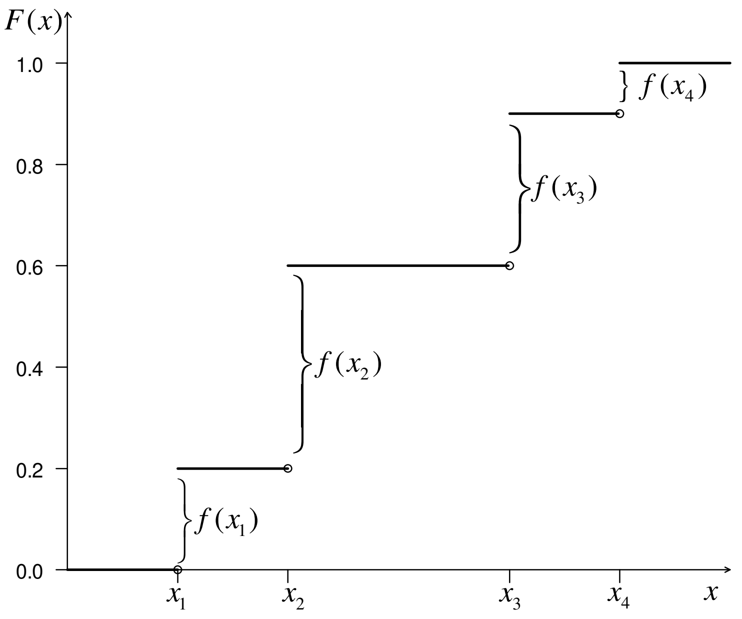
$$P(X \in B) = P(B) = \sum_{x_i \in B \cap D} f(x_i).$$

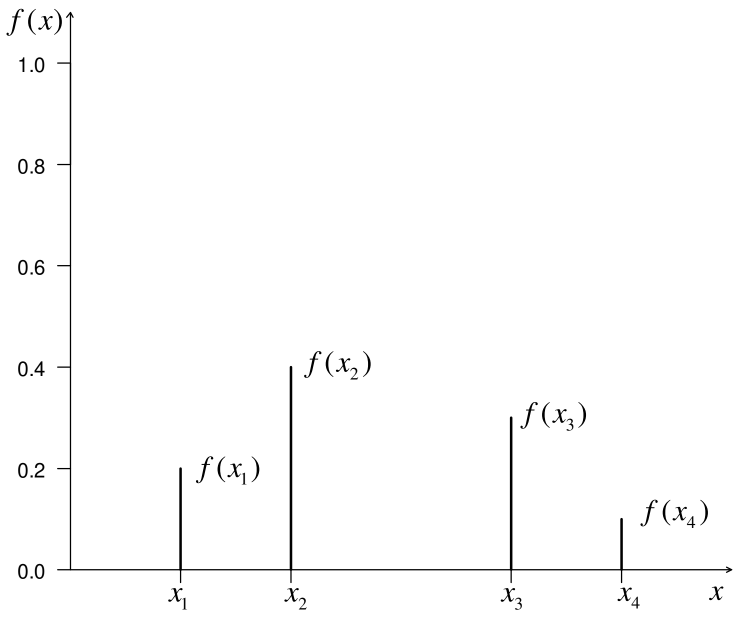
- A função de distribuição pode exprimir-se em termos da respectiva função probabilidade,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

representando-se por x_i os elementos do conjunto *D*

- A função de distribuição apresenta tantos saltos quantos os elementos do conjunto *D*.


$F(x)$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
$f(x_1)$
$f(x_2)$
$f(x_3)$
$f(x_4)$
x_1
x_2
x_3
x_4
x


$f(x)$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
$f(x_1)$
$f(x_2)$
$f(x_3)$
$f(x_4)$
x_1
x_2
x_3
x_4
x

Exemplo 2.5 – Considere-se a variável aleatória associada com a contagem do número de faces obtido no lançamento de três moedas regulares. O número de «faces» em três lançamentos só pode ser 0, 1, 2 ou 3.

Portanto:

– Quando $x < 0$, $F(x) = 0$;

– Quando $0 \leq x < 1$, $F(x) = P(X = 0) = (1/2)^3 = 0.125$;

– Quando $1 \leq x < 2$:

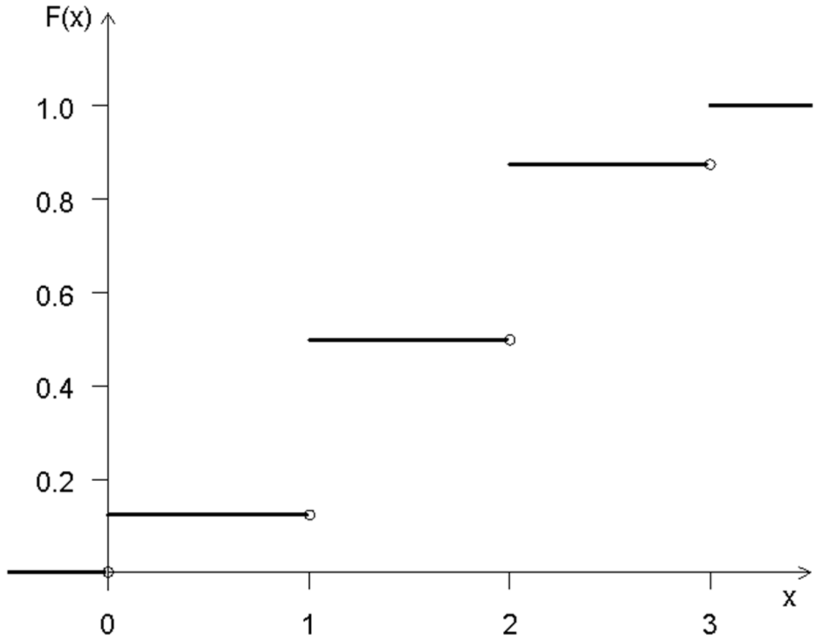
$$F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = (1/2)^3 + 3 \times (1/2)^3 = 0.500;$$

– Quando $2 \leq x < 3$:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= (1/2)^3 + 3 \times (1/2)^3 + 3 \times (1/2)^3 = 0.875; \end{aligned}$$

– Quando $x \geq 3$: $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$.

Consequentemente $F(x)$ tem a seguinte representação gráfica:



- **Exemplo 2.6 –** Seja X o número de lançamentos de um dado até sair uma «sena» (6 pontos) . Obtenha as funções probabilidade e distribuição de X.

2.5 Variável aleatória contínua

Uma variável aleatória contínua pode tomar todos os valores num determinado intervalo de reais.

.

• **Definição – Função densidade de probabilidade**

A função real de variável real $f(x)$, não negativa, tal que satisfaz a condição $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$, $\forall x \in \Re$, chama-se função densidade de probabilidade.

Noção de função densidade: Sabe-se que $P(X \in \Re) = 1$ e que

$P(X \in (-\infty, x]\,) = F(x),\ \forall x \in \Re$

Para $\Delta x > 0,\ P(X \in (x, x+\Delta x]) = F(x+\Delta x) - F(x)$

A quantidade média de probabilidade no intervalo $(x, x+\Delta x]$ vem

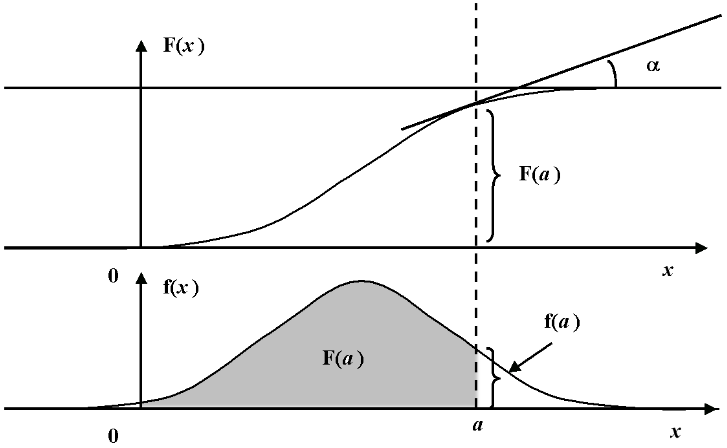
$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

O limite, quando $\Delta x \to 0$, se existir, representa a densidade de probabilidade no ponto x, $f(x)$. Recorde-se que $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$

Nos pontos em que $F'(x)$ não existe, convenciona-se que $f(x) = 0$. Assim,

$$f(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{(nos pontos onde existe derivada),} \\ 0 & \text{(nos outros pontos).} \end{cases}$$

Representação gráfica



Para cada ponto a, verifica-se facilmente que:

- $F(a)$ é a ordenada da função distribuição = área delimitada pela função densidade entre $-\infty$ e a;
- $f(a)$ é a ordenada da função densidade = declive da função de distribuição no ponto a.

É indiferente representar uma variável aleatória contínua com a respetiva função distribuição ou com a função densidade.

Algumas propriedades da função densidade:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Re;$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1;$
- $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) = P(a < X \leq b), \quad b > a$

- Sendo X variável aleatória contínua, $P(X = a) = 0, \ \forall a \in \Re$ (**a probabilidade em qualquer ponto é nula**) já que $P(X = a) = F(a) - F(a^{-}) = F(a) - F(a) = 0;$
- Assim

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b), \quad b > a.$$

- A função de densidade pode assumir valores superiores a 1 (**a função densidade não é uma probabilidade!**)

Exemplo 2.7: Seja X uma variável aleatória com $f$unção densidade $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & se -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}$. Obtenha a função distribuição de X.

Exemplo 2.8 – Assume-se que X, vida útil, em milhares de horas, de um componente de determinado tipo de radar tem uma função de distribuição da forma $F(x) = 1 - \exp\{-\theta\, x\}$, onde θ é um parâmetro que caracteriza a qualidade do componente (quanto menor é θ, melhor é a qualidade). Assuma-se que $\theta = 0{,}03$.

Pretende determinar-se a probabilidade de um componente escolhido ao acaso:

a) dure menos de 20 mil horas;

b) dure entre 30 mil e 50 mil horas;

c) dure mais de 60 mil horas.

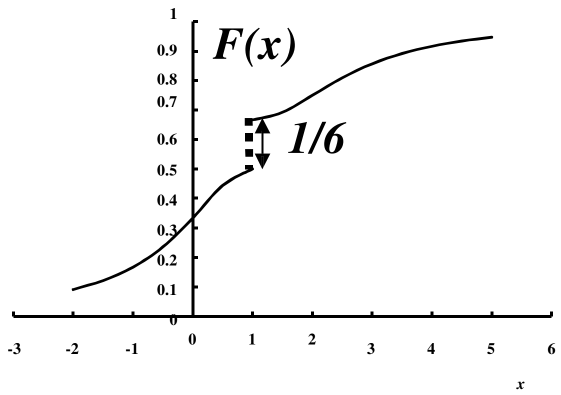
Resolver com base na função distribuição e com base na função densidade

2.6 Variáveis aleatórias mistas:

Combinam as 2 situações anteriores

Exemplo 2.9 – Considere-se a variável aleatória mista X com função de distribuição,

$$F(x) = \begin{cases} [2+(x-1)^2]^{-1} & (x<1) \\ 1-[3+(x-1)^2]^{-1} & (x \geq 1) \end{cases}$$



O único ponto de descontinuidade é $x = 1$.

Logo:

$$P(X = 1) = F(1) - F(1^-) = 1/6$$

$$P(X = x) = 0, \quad x \neq 1$$

Por outro lado,

$$P(0.5 < X < 1) = F(1^-) - F(0.5) = 1/18, \; P(-1 < X \leq 1) = F(1) - F(-1) = 1/2$$

2.7 Funções de uma variável aleatória

- Definiu-se a v.a. X, conhecendo-se $F_X(x)$;
- Está-se interessado numa outra v.a., Y, função de X, $Y = \psi(X)$, pretendendo-se determinar a função de distribuição de Y, $F_Y(y)$, a partir de $F_X(x)$.
- ψ é uma função real de variável real;
- Y é uma variável aleatória que assume o valor $y = \psi(x)$ quando $X = x$.

Começa-se por considerar um caso particular mais simples: X é uma **variável aleatória discreta**.

- $Y = \psi(X)$ também é discreta e o problema consiste em determinar a função probabilidade de Y, $f_Y(y)$,a partir da função probabilidade de X, $f_X(x)$.
- Seja então $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\}$ o conjunto de pontos que X assume com probabilidade positiva; consequentemente $D^* = \psi(D)$ é o conjunto de pontos que Y assume com probabilidade positiva.
- Dado $y \in D^*$ seja, $A_y = \{x\colon\ \psi(x) = y,\ x \in D\}$.
- A função probabilidade de Y vem dada por,

$$f_Y(y) = P(Y = y) = P(X \in A_y) = \sum_{x_i \in A_y} f_X(x_i)$$

Exemplo 2.10 – Considere-se a variável aleatória discreta X com a função probabilidade dada por:

x	-2	-1	0	1	2
$f_X(x)$	$1/5$	$1/4$	$1/6$	$1/10$	$17/60$

Seja $y = \psi(x) = x^2$.

Tem-se $D = \{-2,-1,0,1,2\}$, $D^* = \{0,1,4\}$. A função probabilidade de Y vem

y	0	1	4
$f_Y(y)$	$1/6$	$7/20$	$29/60$

Y y

Caso geral: *X* é uma **variável aleatória qualquer**

A mudança de variável assenta na igualdade, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(A_y\right)$onde $A_y = \{x\colon\ \psi(x) \leq y\}$ e $P(A_y)$ pode em regra calcular-se a partir de $F_X(x)$.

Exemplo 2.11 – Supondo que a variável aleatória *X* tem função densidade

$f_X(x) = 1/2$ para $-1 < x < 1$, isto é, $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & -1 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$

Determine as funções de distribuição de:

a) $Y = \ |X|$;   b) $Y = 2X + 1$;

Observação Final

Mesmo sendo X v.a. continua e ψ é função contínua, Y pode não ser contínua.

X	$Y = \psi(X)$
Discreta	Discreta
Mista	Discreta Mista
Contínua	Discreta Mista Contínua

Exemplo 2.12 – Dada a variável aleatória X com função densidade,

$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & (-1 < x < 1) \\ 0 & (\text{outros } x) \end{cases}$ introduza-se, $Y = \psi(X) = \begin{cases} 0 & (X < 0) \\ X & (X \geq 0) \end{cases}$.

Obter a função de distribuição de Y.

2.8 Valor esperado de variáveis aleatórias

- **Exemplo 2.13 –** Considere-se uma lotaria com 100 bilhetes e os seguintes prémios: um prémio de 100 euros; dois prémios de 20 euros; 3 prémios de 10 euros.

Fazendo a soma dos produtos das quantias que se podem ganhar pelas respetivas probabilidades,

$$100 \times \frac{1}{100} + 20 \times \frac{2}{100} + 10 \times \frac{3}{100} += 1{,}7$$

obtém-se o valor esperado do comprador de um bilhete.

- **Definição – Valor esperado de uma variável aleatória**

Seja X uma v.a. discreta com função probabilidade $f_X(x)$. A expressão,

$$E(X) = \sum_{x \in D} x f_X(x),$$

quando, $\sum_{x \in D} |x| f_X(x) < +\infty$, define o **valor esperado**, **média** ou **esperança matemática** de X.

Notação: $E(X) = \mu_X = \mu$

Comentário:

- O valor esperado de uma variável aleatória discreta corresponde, muitas vezes, a um ponto que **não pertence** a D.

Interpretação (ponto de vista frequencista):

Se a experiência aleatória, em cada realização da qual se observa *x*, for repetida um grande número de vezes, a média aritmética dos valores obtidos está, quase certamente, "muito próxima" de $E(X)$.

Exemplo 2.14 – Se *X* é a variável aleatória que representa o número de pontos obtido com o lançamento de um dado regular, então é simples exercício verificar que $E(X) = 3.5$.

Repare-se que $E(X) \notin D$;

Exemplo 2.15 – No caso do exemplo 2.6 (nº de lançamentos até sair "6"), o cálculo do valor esperado torna-se um pouco mais complicado. Recorde-se que se tinha $\boldsymbol{f(x) = (5/6)^{x-1}(1/6)}$, $x = 1,2,3,\cdots$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}\sum_{x=1}^{\infty} x\left(\frac{5}{6}\right)^{x} = \frac{1}{6}\times\frac{6}{5}\times\frac{5/6}{(1-5/6)^2}$$
$$= \frac{1}{5}\times\frac{5/6}{1/36} = 6$$

Recorde-se que a soma de uma série aritmético-geométrica é dada por

$\sum_{k=1}^{\infty} kc^k = \frac{c}{(1-c)^2}$ para $|c| < 1$

Exemplo 2.16 - Seja X uma variável aleatória com função probabilidade é dada por $f(x) = \frac{6}{(\pi x)^2}, x = 1,2,3,\ldots$ em que $\pi = 3.14159\ldots$
Mostre que $f(x)$ é de facto uma função probabilidade, mas E(X) não existe. (Note que $\sum_{i=1}^{\infty} x^{-2} = \pi^2/6$).

- **Definição – Valor esperado de uma variável aleatória contínua**

Seja X uma v.a. contínua com função densidade $f_X(x)$. A expressão,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx,$$

quando $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)dx < \infty$, define o valor esperado, média ou esperança matemática de X .

- **Exemplo 2.17 –** Obter o valor esperado da variável aleatória X, com função densidade

$$f_X(x) = 3x^{-4},\ (x > 1)$$

- **Exemplo 2.18 –** Mostre que a seguinte função é uma função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = x^{-2},\ (x > 1).$$

Mostre também que E(X) não existe.

2.9 Valores esperados de funções de variáveis aleatórias

- **Definição – Valor esperado de uma função de variável aleatória**

$E[\psi(X)] = \sum_{x \in D} \psi(x) f_X(x),$ caso discreto

$E[\psi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) f_X(x) dx,$ caso contínuo

desde que $E[|\psi(X)|] < \infty$.

Note-se que, sendo X uma variável aleatória contínua, $\psi(X)$ **pode não ser contínua,** como se viu no capítulo anterior**.**

Observações

- A **existência de** $E(X)$ **não implica a existência de** $E[\psi(X)]$, **e inversamente**.
- É indiferente calcular $E[\psi(X)]$ pela definição do slide anterior ou proceder à mudança de variável $Y=\psi(X)$ e calcular $E(Y)$ recorrendo à definição usual, isto é

$$\sum_{y\in D_Y} y f_Y(y)=\sum_{x\in D_X}\psi(x)f_X(x) \qquad \text{ou} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)f_X(x)dx$$

- **Exemplo 2.19 –** Dada a variável aleatória discreta X, com função probabilidade,

$$f(x)=1/3,\ x=-1,0,1$$

considere-se a função $\psi(X)=X^2$. Calcular $E(X^2)$ pelos 2 métodos.

Exemplo 2.20 – Seja uma variável aleatória X com (retoma-se o exemplo 2.17)

$$f_X(x) = 3x^{-4}, \quad (x > 1), \qquad F_X(x) = 1 - x^{-3}; \qquad (x > 1)$$

Considere-se $Y = \psi(X) = X^2$. Obter $E(Y)$ (pelos dois métodos)

Obter agora $E(Z)$ com $Z = \begin{cases} 0 & 1 < X \le 2 \\ 1 & X > 2 \end{cases}$

Exemplo 2.21 – Considere uma variável aleatória X com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} 1/2^x & (x = 1,2,\ldots), \\ 0 & (\text{outros } x). \end{cases}$$

Seja $\psi(X) = 2^X$. Mostre que $E(X)$ existe, mas $E(\psi(X))$ não existe (note que p

$|c| < 1,\ \sum_{x=1}^{\infty} x c^x = \frac{c}{(1-c)^2}$).

2.10 Propriedades dos valores esperados

Propriedades do valor esperado (seja X discreta, contínua ou outra):

1. Se c é uma constante então, $E(c) = c$.
2. Se c é uma constante e se existe $E[\psi(X)]$ então,$E[c\psi(X)] = cE[\psi(X)]$.
3. Se existirem $E[\psi_1(X)]$ e $E[\psi_2(X)]$ então,

$$E[\psi_1(X) + \psi_2(X)] = E[\psi_1(X)] + E[\psi_2(X)].$$

Observações

- Existindo $E\left(\psi_j(X)\right)$, tem-se $E\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \psi_j(X)\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j E\left[\psi_j(X)\right]$
- Pode existir o V.E da soma sem que exista V.E de cada $\psi_j(X)$

2.11 Momentos em relação à origem

- Objetivo: Caracterizar uma v.a. através de um pequeno número de indicadores capazes de descrever os aspetos mais significativos do seu comportamento.

- Para tal utilizam-se 2 tipos de momentos:
    - Os momentos em relação à origem
    - Os momentos em relação à média

- **Definição – Momento de ordem *k* em relação à origem**

$$\mu'_k = E(X^k) \quad \text{(se existir)}$$

Observações:

- Trata-se do valor esperado da função $\psi(X) = X^k$.
- No caso discreto $E(X^k) = \sum_{x \in D} x^k f_X(x)$ enquanto no caso contínuo $E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) dx$

2.12 Momentos em relação à média

• **Definição – Momento de ordem k em relação à média**

$$\mu_k = E[(X-\mu)^k]$$

Observações:

- Paralelismo com as definições anteriores com $\psi(X) = (X-\mu)^k$.
- Caso discreto $E(X-\mu)^k = \sum_{x\in D}(x-\mu)^k f_X(x)$ e caso contínuo

$$E(X-\mu)^k = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^k f_X(x)dx$$

- Os momentos em relação à média podem ser expressos em termos dos momentos em relação à origem. Por exemplo

$$E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

• Resultado importante

É possível provar que, se existir o momento de ordem k de uma variável aleatória, então também existe o momento de ordem s, com $s < k$, da mesma variável aleatória. **Por exemplo, existindo o momento de ordem 10 existirão todos os momentos de ordem inferior a 10**. **Este resultado é válido para os momentos ordinário e para os momentos em relação à média**.

Localização

- **1º momento em relação à origem** (média ou valor esperado de X) serve como **parâmetro de localização** da distribuição de X.
- Avaliada a localização torna-se interessante avaliar a dispersão da variável aleatória em torno desta localização (volatilidade nas séries financeiras). Será a média "representativa" do comportamento da variável?

Dispersão em relação à média

- A dispersão e os momentos em relação à média: Parte-se da família de funções $\psi(X) = (X - \mu)^k$, onde $k = 1,2,...$

- O 1º momento em relação à média é sempre nulo → **não tem interesse**.

- O **2º momento em relação à média,** a **variância** (representada por $\mathrm{Var}(X)$, σ_X^2 ou simplesmente σ^2), é muito importante na análise da dispersão.
  $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \mu_2 = E\left((X-\mu)^2\right)$

2.13 Variância de uma variável aleatória

Definição - Variância

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \mu_2 = E\left((X-\mu)^2\right)$$

Comentários:

- Estamos a assumir que a variância existe
- A variância nunca pode ser negativa, $\mathrm{Var}(X) \geq 0$;
- $\mathrm{Var}(X) = 0$, só se X for variável aleatória degenerada: $P(X = c) = 1$;
- **Para o cálculo da variância pode aproveitar-se a relação**

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2,$$

- A existência da variância implica a existência da média

Propriedades da variância:

1) Se c é uma constante, $\mathrm{Var}(c) = 0$;

2) Se c é uma constante, $\mathrm{Var}(c\,X) = c^2\,\mathrm{Var}(X)$;

3) Se c e d são constantes, $\mathrm{Var}(c\,X + d) = c^2\,\mathrm{Var}(X)$.

Variância, desvio-padrão e dispersão

- A variância corresponde ao valor esperado de uma grandeza ao quadrado logo não compara “bem” com a média desta grandeza. Assim utiliza-se geralmente a raiz quadrada positiva da variância, o **desvio padrão**.

- **Definição – Desvio-padrão** $\sigma = +\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$,

- **Definição – Coeficiente de variação**

  Para avaliar o peso relativo da dispersão face à localização, utiliza-se o **coeficiente de variação**: $\mathrm{CV} = \dfrac{\sigma}{\mu}$ (utiliza-se sobretudo se o suporte de $X \subset \Re^{+}$)

- Depois de avaliar a **localização** e a **dispersão** de uma v.a., existem ainda 2 aspectos interessantes: a **skewness/assimetria e a kurtosis**

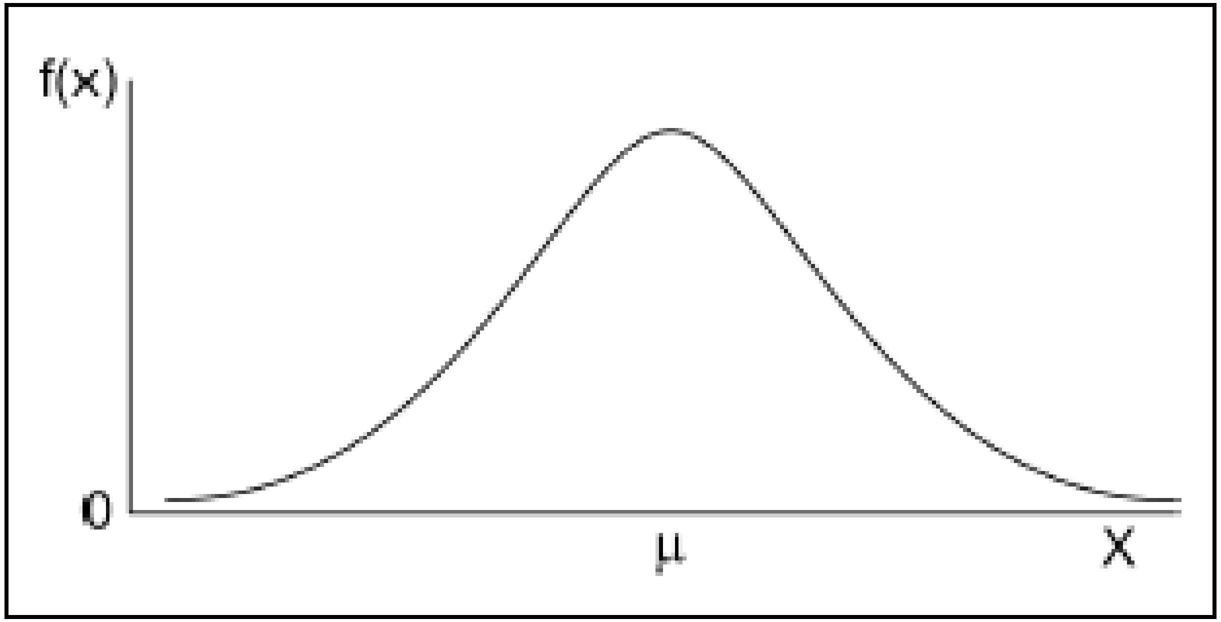
2.14 Skewness/Assimetria

- **Definição – Skewness ou coeficiente de assimetria:** $\gamma_1 = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$

Interpretação do coeficiente de assimetria:

- Parte-se do menor momento central de ordem ímpar que é possível utilizar;
- Porquê um momento central de ordem ímpar?
- Simetria da distribuição de X em relação à media $f(-x+\mu) = f(x+\mu)$ implica que **todos** os momentos centrais de ordem impar – que existirem – sejam nulos;

Função densidade simétrica:



- Distribuição simétrica $\rightarrow \gamma_1 = 0$

2.15 Kurtosis

• **Definição – Coeficiente de *kurtosis*:** $\gamma_2 = \frac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}.$

Interpretação do coeficiente de *kurtosis*:

- "espessura" das "caudas" da distribuição ou, de forma equivalente, o "achatamento" da função densidade na zona central da distribuição.

- A definição é válida para v.a. discretas e contínuas mas o seu interesse reside sobretudo para v.a. contínuas com distribuição simétrica.

- Os coeficientes γ_1 e γ_2 desempenham um papel muito importante para analisar o **grau de afastamento de uma certa distribuição em relação à distribuição normal**. Nesta distribuição tem-se $\gamma_1 = 0$, pois trata-se de uma distribuição simétrica, e $\gamma_2 = 3$ .Muitas vezes utiliza-se o Excesso de Kurtosis dado por $\gamma_2 - 3$ para tornar a comparação com a normal mais direta.

Exemplo 2.22 – (Mesma localização e dispersão diferente) Considerem-se as variáveis aleatórias discretas com funções probabilidade,

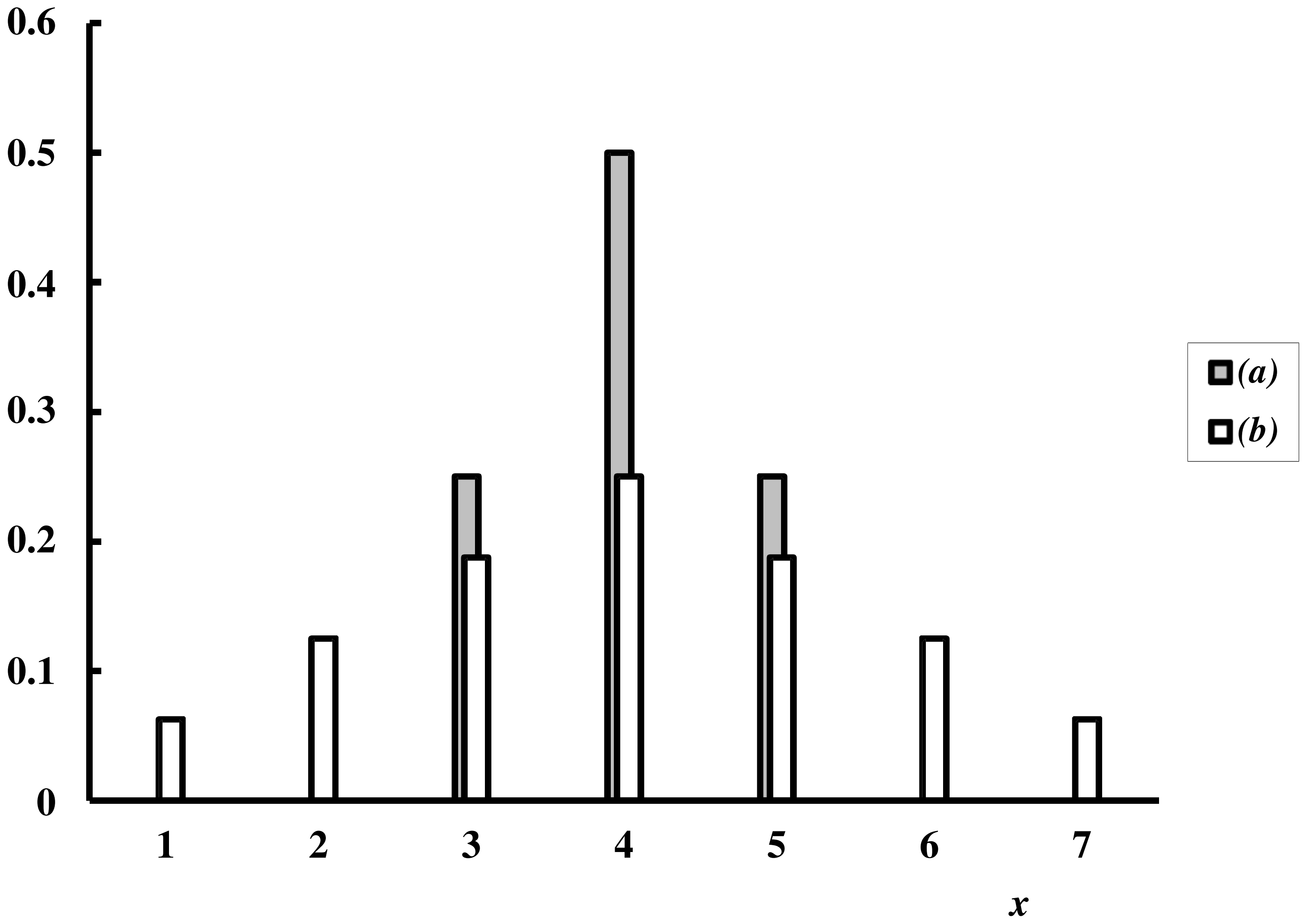
(a) $f(x) = \frac{2-|x-4|}{4} \quad x = 3,4,5,$

(b) $f(x) = \frac{4-|x-4|}{16} \quad x = 1,2,3,4,5,6,7.$

Tem-se:

(a) $\mu = 4, \quad \sigma^2 = 0.5, \quad \sigma = 0.71, \quad \text{CV} = 0.1775, \quad \gamma_1 = 0;$

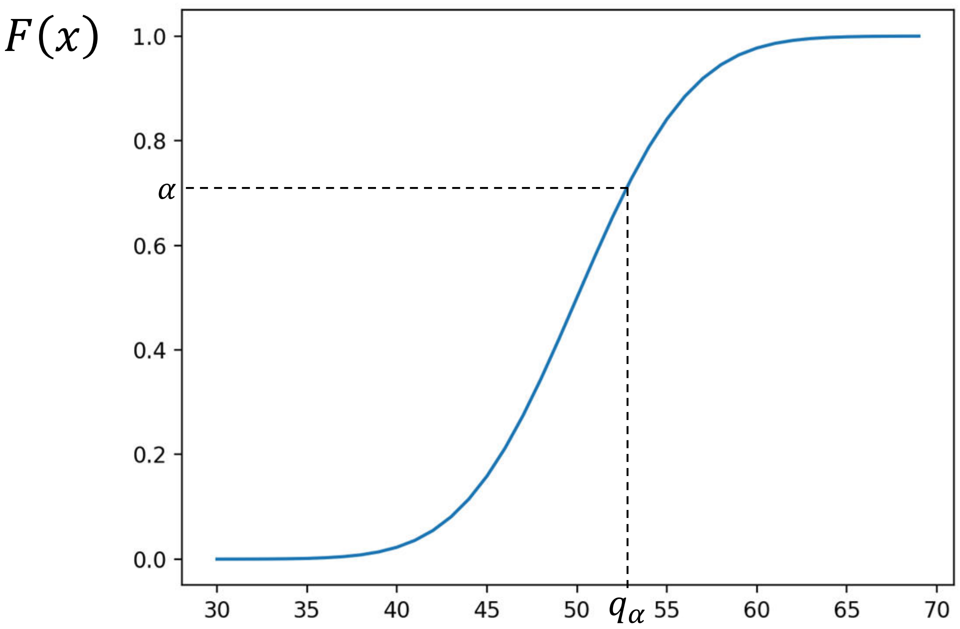
(b) $\mu = 4, \quad \sigma^2 = 2.5, \quad \sigma = 1.58, \quad \text{CV} = 0.3950, \quad \gamma_1 = 0.$


0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1
2
3
4
5
6
7
x
(a)
(b)

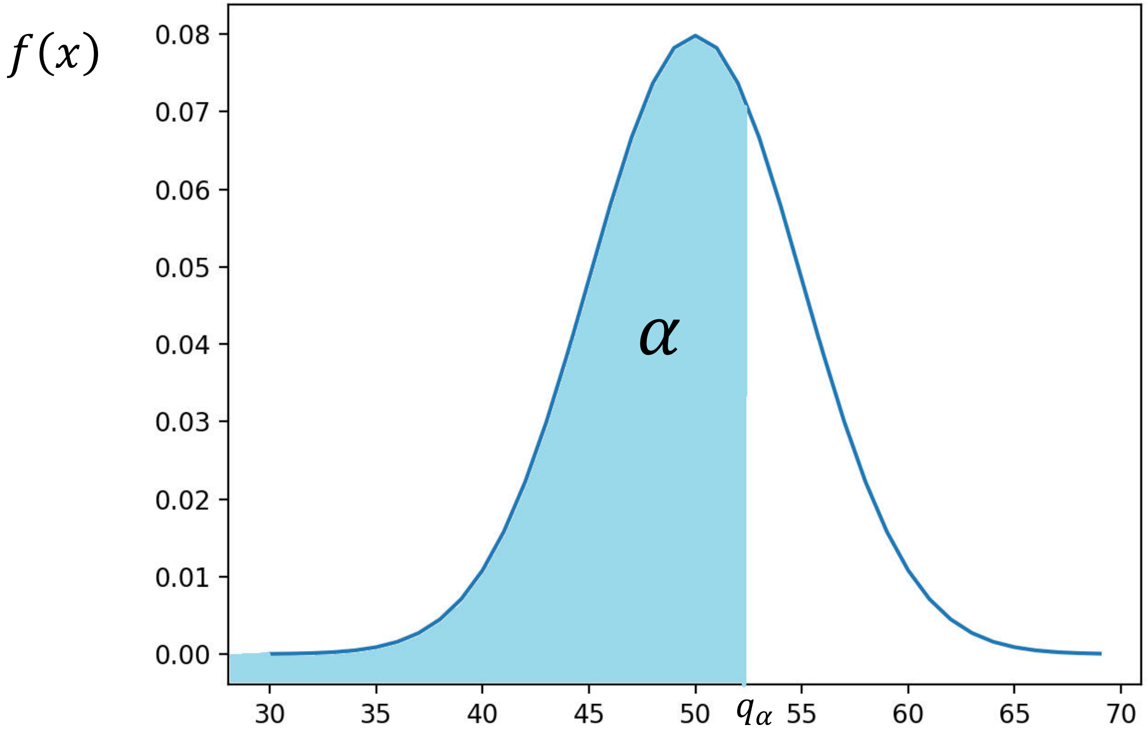
2.16 Quantis

- Os quantis ajudam a caracterizar o comportamento da variável aleatória. Eles tornam-se “imprescindíveis” quando esta não tem momentos.
- Na modelação de séries financeiras o VaR (“Value at Risk”) constitui um indicador importante. O VaR mais não é do que um quantil da distribuição dos retornos.
- Embora se possa definir quantis para qualquer tipo de variável aleatória, só iremos apresentar a definição de quantil para o caso em que a variável aleatória é continua com função distribuição $F(x)$ estritamente crescente uma vez que neste caso a definição de quantil é simples e de interpretação fácil.

Definição: Seja X uma variável aleatória continua com função distribuição estritamente crescente $F(x)$ .O quantil de ordem α em que $0 < \alpha<1$, é dado por pelo único valor q_α que resolve a equação $F(q_\alpha) = \alpha$, ou seja $q_\alpha = F^{-1}(\alpha)$, em que $F^{-1}(\alpha)$ é a função inversa de $F(x)$ avaliada em α;



Uma vez que $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$, em que $f(x)$ é a função densidade de probabilidade de X então $F(q_\alpha)= \int_{-\infty}^{q_\alpha} f(x)dx = \alpha$



Exemplo 2.23 - Seja X uma v.a. que traduz o montante de uma indemnização paga por uma seguradora para determinado risco. Sabe-se que

$$f(x) = \frac{5}{x^6}, \quad x \geq 1 \quad .$$

Calculem-se os quantis 0.5 e 0.95.

Note-se que $F(x) = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^5$ para $x \geq 1$..

Localização

- **Mediana**: Quantil de ordem $\alpha = 0.5$, $q_{0.5}$ - **medida de localização**

Pode também representar-se a mediana com os símbolos μ_e ou med(X).

Outras características

- **Quartis** ($\alpha = 0.25, 0.50, 0.75$):
  - O primeiro quartil, $q_{0.25}$, delimita superiormente o primeiro quarto da massa de probabilidade;
  - O terceiro quartil, $q_{0.75}$, delimita inferiormente o último quarto da massa de probabilidade.
  - Obviamente que a mediana é o segundo quartil.

- **Intervalo inter-quartis**: O intervalo $(q_{0.25}, q_{0.75})$ abrange 50% da massa de probabilidade. **A amplitude inter-quartis constitui uma medida de dispersão absoluta,** no âmbito dos parâmetros de ordem,

$$\text{AIQ} = q_{0.75} - q_{0.25}.$$

Caso se pretenda uma medida de **dispersão relativa** utilizar $\dfrac{q_{0.75} - q_{0.25}}{\mu_e}$

- **Decis** ($\alpha = 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$) e **percentis** ($\alpha = 0.01, 0.02, \ldots, 0.99$);

Exemplo – Retome-se o exemplo 2.23 e calculem-se os quartis e as medidas de dispersão absoluta e relativa.

2.17 A moda

- **Moda** - **medida de localização**

  A moda corresponde ao ponto do domínio que maximiza a função densidade/função probabilidade, o qual pode não ser único (ou pode não existir).

- No caso de distribuições simétricas unimodais, a média, a mediana e a moda são iguais.

- **Exemplo**: Para o exemplo 2.23 compare-se média, mediana e moda.